



Matemàtiques II

Model 2

Contesta de manera clara i raonada una de les dues opcions proposades. Es disposa de 90 minuts.

Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4.

Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.

Opció A

1. a) Calculeu totes les matrius 2×2 de la forma $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & -2-a \end{pmatrix}$ que satisfan

$A^2 + 2 \cdot A + 3 \cdot I = 0$, on I és la matriu identitat. O sigui, calculeu l'expressió de c en funció de a . (5 punts)

b) Demostreu que les matrius de l'apartat anterior són invertibles i calculeu la seva inversa. (5 punts)

2. Demostreu que les rectes següents es tallen (5 punts) i calculeu el punt de tall: (5 punts)

$$r_1: \begin{cases} x + 2y + 3z = -1, \\ y - z = 2, \end{cases} \quad r_2: \begin{cases} x + y + z = -1, \\ 2x + z = -4. \end{cases}$$

3. Sigui a un valor estrictament positiu. Considerem la funció polinòmica dependent de a : $f(x) = x^3 + a \cdot x + 1$.

a) Demostreu que l'equació $f(x) = 0$ només pot tenir com a màxim una solució. (5 punts)

b) Demostreu que la solució de l'apartat anterior existeix i està entre -1 i 0 . (5 punts)

4. Feu un dibuix del recinte limitat per la corba $f(x) = \frac{x^2}{x+2}$ entre els valors $x = -1$, $x = 1$ i l'eix OX (3 punts). Calculeu l'àrea d'aquest recinte (7 punts).

Opció B

1. Demostreu que els punts $P_1(2,1,1)$, $P_2(5,2,1)$, $P_3(9,1,0)$, $P_4(11,4,1)$ són coplanaris (5 punts) i calculeu l'equació del pla que els conté. (5 punts)

2. Discutiu el següent sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre b

$$\begin{cases} 3x + 6y + 9z = 1, \\ 3x + by + bz = 1, \\ bx + y - z = 1. \end{cases} \quad (7 \text{ punts})$$

Resoleu el sistema en el cas en què sigui compatible indeterminat. (3 punts).

3. Determineu els màxims i mínims de la funció: $f(x) = \frac{1+x}{1+x+x^2}$. (10 punts)

4. Calculeu la següent integral indefinida: $\int \frac{1}{2x^2+4} dx$. (10 punts)